МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Акустичні електронні системи та
технології обробки акустичної інформації»
спеціальності 171 «Електроніка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Теорія випадкових процесів: Лабораторний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О.В. Гармаш. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,786 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 47 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021р.) за поданням Вченої ради факультету електроніки (протокол № 04/21 від 26.04.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ
ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Укладачі:	*Гармаш Оксана Вікторівна*, канд. техн. наук
Відповідальний редактор	*Найда С.А* , д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри акустичних та мультимедійних електронних систем КПІ ім. Ігоря Сікорського
Рецензент	*Попов А.О.*, канд. техн. наук, доц., доцент кафедри електронної інженерії КПІ ім. Ігоря Сікорського

Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості та методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з курсу «Теорія процесів та систем-2. Випадкові процеси». Кожна лабораторна робота містить розрахункову частину, яку необхідно здійснити перед її виконанням.

Передбачений для студентів спеціальності 171 Електроніка, а також може бути корисним і для інших технічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Теорія процесів та систем-2. Випадкові процеси» є однією з базових дисциплін, що забезпечують підготовку інженерів в цілому і фахівців в області обробки сигналів зокрема. На освоєння курсу істотно впливає зміст лабораторних робіт і методика їх проведення.

Запропоновані в методичних вказівках лабораторні роботи протягом ряду років проводяться на кафедрі акустичних та мультимедійних електронних систем КПІ ім. Ігоря Сікорського.

Реалізація лабораторних робіт здійснюється за допомогою спеціально розробленого пакету програм мовою Delfi. Застосування комп'ютерного програмного забезпечення пов'язане з старінням наявної лабораторної апаратури або з відсутністю нової, яка коштує багато більше ніж комп'ютери. Даний пакет програм займає менше 2 Мб на диску і не вимагає установки додаткового програмного забезпечення.

Теоретичні відомості, необхідні для виконання робіт, приводяться у скороченому вигляді перед описом кожної лабораторної роботи. Завданням студентів є вивчення відповідних розділів курсу, для конкретних вихідних даних провести теоретичні розрахунки, побудувати необхідні графіки, заповнити таблиці і провести аналіз результатів експериментальних даних, включаючи побудову таблиць, графіків і т.д.

ІНСТРУКЦІЯ КОРИСТУВАЧА

Для запуску відповідної лабораторної роботи на робочому столі лабораторного комп'ютера виберіть папку «ТПС.СП лаб», в якій знаходяться всі лабораторні роботи з курсу.

При запуску лабораторної роботи з'являється робоче вікно програми (рис.1)

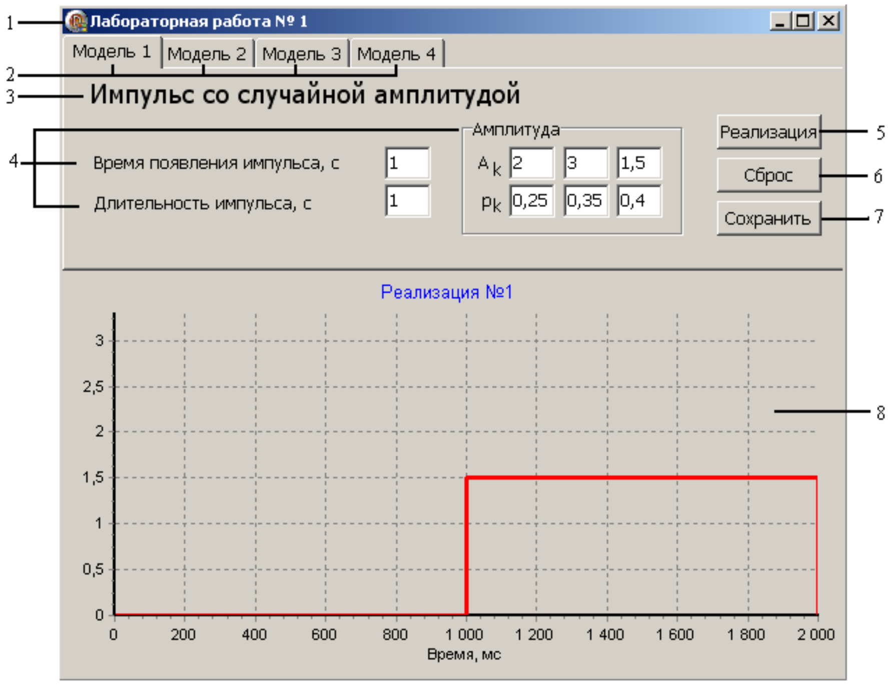


Рис.1

1- номер лабораторної роботи;

2- закладки для здійснення різних завдань лабораторної роботи. В даному випадку кожна закладка відповідає різним моделям досліджуваного процесу.

3- назва відповідного завдання закладки (у даному випадку моделі 1);

4- параметри, які встановлюються вручну і попередньо були розраховані або задані в конкретній лабораторній роботі;

5- кнопка, що реалізує проведення експерименту, в результаті чого отримуємо графік шуканої характеристики (в даному випадку графік реалізації сигналу);

6- кнопка, для очищення всіх налаштувань і області графіка даної закладки;

7- кнопка, що дозволяє зберегти графік зображений в області 8, в будь-якому графічному форматі;

8- поле візуалізації графіків, як результату модельного експерименту.

Крім основних кнопок, в окремих лабораторних роботах зустрічаються і додаткові налаштування. Серед яких такі (рис.2)

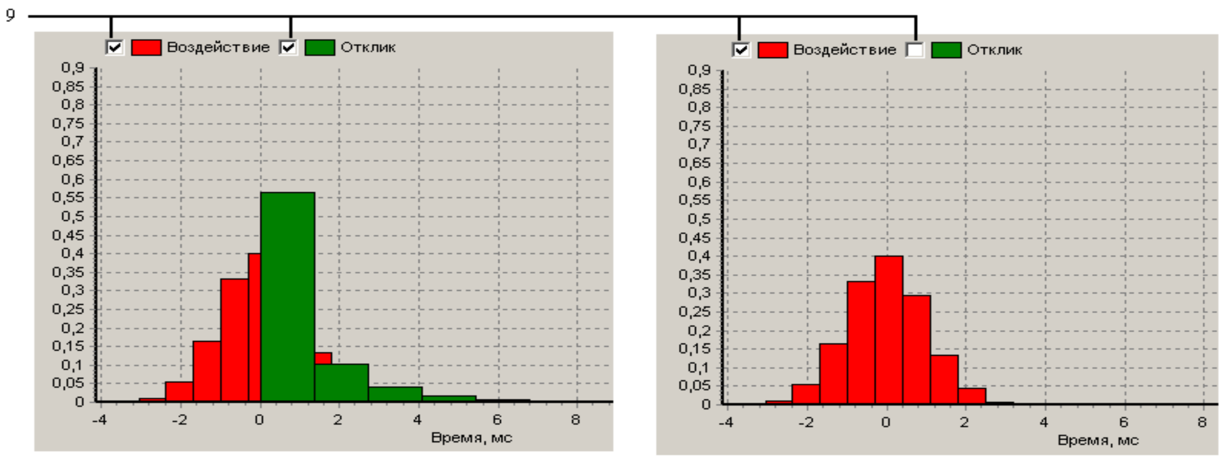
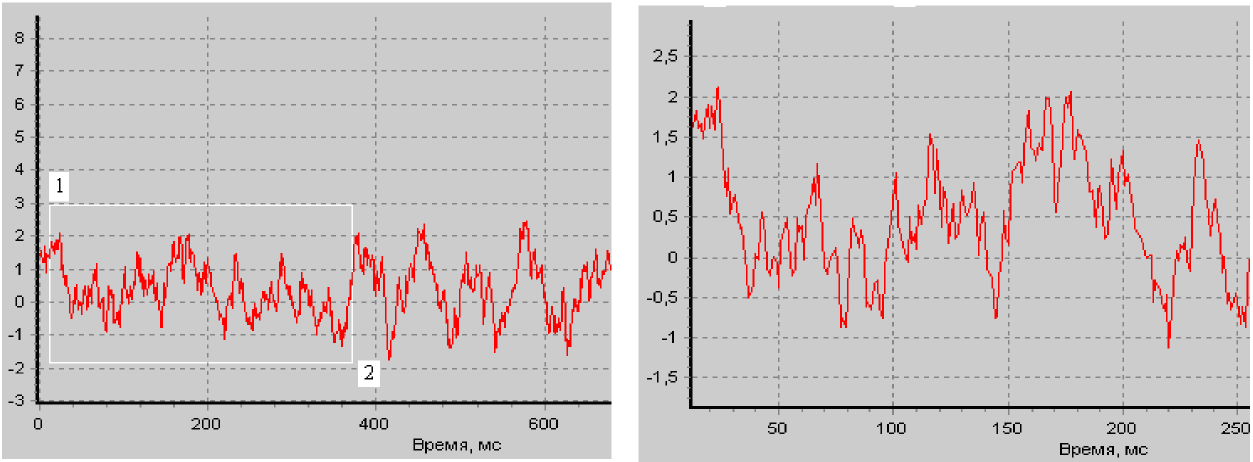


Рис.2

9- Прапорці, що дозволяють відображати шукані характеристики сигналів окремо або одночасно для різних умов експерименту, з метою їх подальших порівнянь.

Зміна масштабу окремої ділянки графіка

Для збільшення окремої ділянки графіка (рис.3) необхідно вибрати комп'ютерною мишею (ліва клавіша) ліву початкову точку (ріс.3.а точка 1) необхідного ділянки далі утримуючи ліву кнопку миші, перетягуємо з'явилася білу рамку вліво до остаточної точки (рис.3 . а точка 2) ділянки збільшення, і відпускаємо кнопку миші



а б

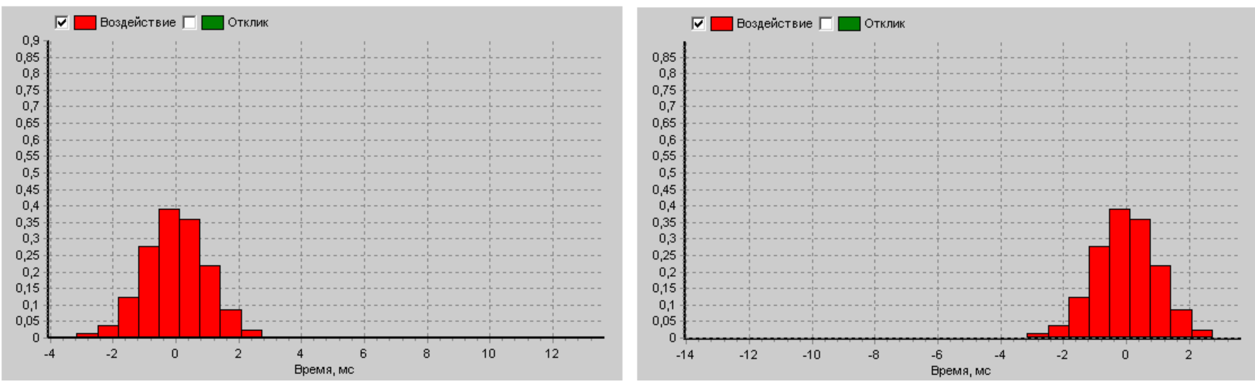
Рис.3

Після зробленого в робочому вікні з'являється вже збільшений ділянку графіка (рис.2 б).

Для повернення вихідного масштабу графіка, необхідно проробити все теж тільки починаючи від точки 2 (рис.3) до точки 1 (рис. 3а).

Переміщення графіків в межах робочого вікна

Для більш точного отримання експериментальних даних графіки можна, як вже було описано раніше збільшувати в масштабі, а також можна переміщати (рис.4 а).



а б

Рис.4

Вибираємо точку, що підлягає переміщенню на поле. Фіксуємо правою кнопкою миші, утримуючи яку ми здійснюємо переміщення графіка. Для фіксації відповідного переміщення відпускаємо праву кнопку миші (рис.4 б).

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Вихідні поняття та визначення

Процес називається випадковим якщо попередньо (до експерименту) відомо лише безліч можливих результатів багаторазових експериментів при незмінних умовах. Для такого процесу результат конкретного експерименту передбачити не можна.

Випадковий процес $\xi(t)$ – це дійсна функція $\xi(t)=\xi(\omega,t)$ з областю визначення $\Omega\times T$ і з областю значень R, де Ω - простір елементарних подій, T - деякий проміжок часу, R - область дійсних чисел.

Випадковий процес є функцією двох змінних, фіксуючи кожен з них отримуємо різний математичний об'єкт.

При фіксованому моменті часу t_j випадковий процес $\xi(\omega,t)$ звертається у *випадкову величину* $\xi(\omega,t_j)=\xi_j(\omega)=\xi_j$.

При фіксованій елементарній події ω_k, що рівносильно проведенню експерименту, отримуємо детерміновану функцію $\xi(\omega_k,t)=x_k(t)$, яка називається *реалізацією* випадкового процесу $\xi(t)$.

Кількість реалізацій залежить від закону розподілу випадкових величин, що входять у випадковий процес і від кількості вироблених експериментів.

Закони розподілу випадкових процесів

Для завдання випадкового процесу необхідно задати його закон розподілу, зокрема багатовимірну функцію розподілу $F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)$.

Функція розподілу випадкового процесу $\xi(t)$ визначається наступним чином

$$F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)=\mathbf{P}\{\xi(t_1)<x_1,...,\xi(t_n)<x_n\},\ \ n=1,2,3,...$$

Багатовимірна функція розподілу має $2n$ – змінних з них n – аргументів $\left(x_n\right)$ та n – параметрів $\left(t_n\right)$.

Два випадкових процесу називаються незалежними, якщо їх спільна функція розподілу дорівнює добутку функцій розподілу кожної з них

$$F_{12}\left(\vec{x},\vec{y};\vec{t},\vec{t'}\right)=F_1\left(\vec{x};\vec{t}\right)F_2\left(\vec{y};\vec{t'}\right)$$

Залежно від властивостей неперервності $F\left(\vec{x},\vec{t}\right)$ миттєві значення випадкових процесів можуть бути: неперервними, дискретними або змішаними.

Якщо функція розподілу випадкового процесу $\xi\left(t\right)$ є неперервною по всіх аргументів $x_k,\ k=\overline{1,n}$, то на ряду з функцією розподілу можна використовувати *щільність імовірностей* $p(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)$ у вигляді

$$p\left(x_1,...x_n;t_1,...t_n\right)=\frac{\partial^n F\left(x_1,...x_n;t_1,...t_n\right)}{\partial x_1\cdot\partial x_2\cdot...\cdot\partial x_n}.$$

Моментні функції випадкових процесів

*Одновимірні.*При аналізі випадкових процесів іноді не обов'язково знати закон розподілу, достатнім є знати моментні функції цих процесів. Математичне сподівання випадкового процесу $\xi\left(t\right)$ визначається в такому вигляді

$$m\left(t\right)=\mathbf{M}\left\{\xi\left(t\right)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xdF\left(x,t\right)$$

Математичне сподівання - це середнє по всіх реалізацій, навколо якого змінюються миттєві значення випадкового процесу.

У випадку, коли математичне сподівання постійно, тобто $m(t)=m=const$ його називають *постійної складовою* випадкового процесу $\xi\left(t\right)$. Математичне сподівання яке змінюється в часі носить назву тренда випадкового процесу.

Одновимірні моментні функції бувають початковими $\alpha_n(t)$ і центральними $\mu_n(t)$, і визначаються відповідно

$$\alpha_k(t) = \mathbf{M}\left\{\xi^k(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x,t),$$

$$\mu_k(t) = \mathbf{M}\left\{\left(\overset{\circ}{\xi}(t)\right)^k\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m(t)\right]^k dF(x,t),$$

де k - порядок моментної функції.

На практиці найчастіше застосовують перший початковий момент $\alpha_1(t) = m(t)$ і другий центральний момент $\mu_2(t) = D(t) = \sigma^2(t)$ називається *дисперсією* випадкового процесу.

$$\mu_2(t) = D(t) = \sigma^2(t) = \mathbf{M}\left\{\left(\overset{\circ}{\xi}(t)\right)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m(t)\right]^2 dF(x,t).$$

де $\sigma(t)$ – *середнє квадратичне відхилення*, яке визначається як $\sigma(t) = +\sqrt{D(t)}$.

Дисперсія випадкового процесу $\xi(t)$ характеризує розкид миттєвих значень процесу щодо його математичного сподівання $m(t)$.

Кореляційна функція випадкового процесу

Коваріаційна функція і *кореляційна функція* випадкового процесу визначаються відповідно

$$K(t_1,t_2) = \mathbf{M}\left\{\xi(t_1)\xi(t_2)\right\}, \qquad R(t_1,t_2) = \mathbf{M}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right\}.$$

Запишемо вираз що зв'язує коваріаційну і кореляційну функції

$$K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) + m(t_1) \cdot m(t_2),$$

$$R(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x_1-m(t_1)\right]\cdot\left[x_2-m(t_2)\right]p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2 .$$

Кореляційна функція характеризує ступінь лінійного зв'язку між двома миттєвими значеннями випадкового процесу

$$R(t,t+\tau)=\mathbf{M}\left\{\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)\right\},$$

де τ – інтервал кореляції.

Інтервалом кореляції називається такий мінімальний інтервал часу $\tau=\tau_0$, починаючи з якого миттєві значення випадкового процесу є некорельованими.

Нормована кореляційна функція

$$r(t_1,t_2)=\frac{R(t_1,t_2)}{\sigma(t_1)\cdot\sigma(t_2)} .$$

При аналізі взаємодії між двома процесами досліджують взаємну кореляційну функцію

$$R_{12}(t_1,t_2)=\mathbf{M}\left\{\overset{\circ}{\xi}_1(t_1)\overset{\circ}{\xi}_2(t_2)\right\}$$

Взаємна кореляційна функція характеризує степінь лінійної залежності або зв’язку між миттєвими значеннями двох випадкових процесів $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$.

Два випадкових процеси називаються некорельованими, якщо їх взаємна кореляційна функція дорівнює нулю, тобто $R_{12}(t_1,t_2)=0$.

Конструктивні випадкові процеси

Розглянемо детерміновану функцію $x(t)=g(t,c_1,c_2,...,c_s)$. Якщо хоча б один з параметрів c_k являє собою випадкову величину, тоді процес $x(t)$ є випадковим процесом, який називається *конструктивним випадковим процесом*.

$$c_k,\quad k=\overline{1,s}\quad \xi(t)=g\left(t,\eta_1,...,\eta_s\right),$$

η_k - випадкова величина, $\xi\left(t\right)=\eta\cdot g\left(t\right)$ – елементарний випадковий процес.

Для опису реальних процессів використовуються конструктивні процесі, які враховують їх фізику виникнення.

Математичне сподівання конструктивного випадкового процесу

$$m\left(t\right)=\mathbf{M}\left\{g\left(t,y_1,...,y_s\right)\right\}=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}}_{s} g\left(t,y_1,...,y_s\right)p_\eta\left(y_1,...,y_s\right)dy_1\cdot...\cdot dy_s\,.$$

В даному випадку замість кореляційної функції процесу знаходять коваріаційну функцію

$$K\left(t_1,t_2\right)=\mathbf{M}\left\{\xi\left(t_1\right)\xi\left(t_2\right)\right\}=\mathbf{M}\left\{g\left(t_1,y_1,...,y_s\right)\cdot g\left(t_2,y_1,...,y_s\right)\right\}=$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}}_{s} g\left(t_1,y_1,...,y_s\right)g\left(t_2,y_1,...,y_s\right)p_\eta\left(y_1,...,y_s\right)dy_1\cdot...\cdot dy_s\,.$$

Кореляційну функцію конструктивного випадкового процесу знаходять враховуючи її зв'язок із коваріаційною функцією за формулою

$$R\left(t_1,t_2\right)=K\left(t_1,t_2\right)-m\left(t_1\right)m\left(t_2\right).$$

Стаціонарні випадкові процеси

Серед випадкових процесів є такі, що ведуть себе більш менш регулярно з часом. Регулярність означає, що в середньому всі реалізації будуть себе поводити приблизно однаково.

Процес $\xi\left(t\right)$ називається стаціонарним, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від початку координат, тобто імовірнісні характеристики процесів $\xi\left(t\right)$ та $\xi\left(t-\Delta\right)$, де $\Delta\neq 0$, співпадають.

Розрізняють два види стаціонарності: в вузькому та в широкому сенсі.

Випадковий процес називається стаціонарним в вузькому сенсі, якщо виконується умова

$$F(x,t-\Delta)=|t=\Delta|=F(x,0)=F(x),$$

$$F(x_1,x_2;t_1-\Delta,t_2-\Delta)=|\Delta=t_2|=F(x_1,x_2;t_1-t_2,0)=F(x_1,x_2;\tau),$$

де $\tau=t_2-t_1$ або $\tau=t_1-t_2$.

Випадковий процес $\xi(t)$ називається стаціонарним в широкому сенсі при одночасному виконанні двох умов:

1. $m(t)=m=\text{const}$; 2. $R(t_1,t_2)=R(t_2-t_1)=R(\tau)$, $\tau=t_2-t_1$.

З другої умови випливає, що $\sigma^2(t)=R(t,t)=R(0)=\text{const}$.

Відмітимо, що зі стаціонарності в вузькому сенсі випливає стаціонарність і в широкому сенсі, *але не навпаки.*

Початкові моментні функції мають вигляд

$$\alpha_k(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k dF(x)=\alpha_k .$$

Таким чином, усі одновимірні моментні функції стаціонарного випадкового процесу не залежать від часу.

$$\alpha_{k_1,k_2}(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1^{k_1}x_2^{k_2}dF(x_1,x_2;t_1,t_2)=|k=k_1+k_2|=\alpha_{k_1,k_2}(\tau),$$

де $\tau=t_2-t_1$

Для стаціонарних процесів вводиться поняття інтервалу кореляції.
Інтервалом кореляції τ_0 називається такий проміжок часу в межах якого миттєві значення стаціонарного випадкового процесу вважаються корельованими.

Однозначного правила визначення інтервалу корреляції не існує, зокрема його можна визначати наступними способами.

На практиці інтервал кореляції позначають τ_ε та знаходять з виразу

$$r(\tau_\varepsilon) = \varepsilon,$$

де $r(\tau)$ – нормована кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу $r(\tau) = R(\tau)/\sigma^2$.

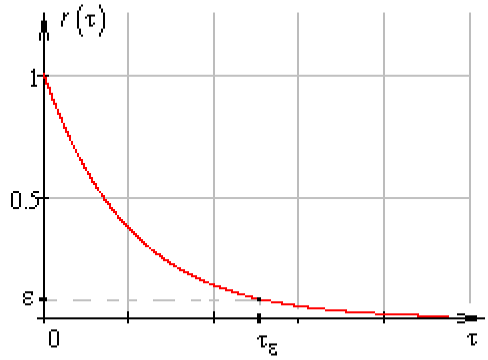


Рис.5

2. Знайти інтервал кореляції можна за формулою

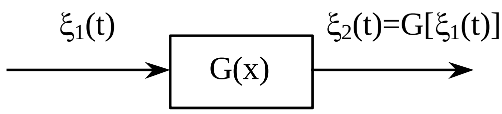
$$\tau_0 = \int_0^{\infty} r(\tau)\, d\tau .$$

Нелінійні перетворення випадкових процесів

При заданні нелінійного перетворення випадкових процесів задача знаходження закону розподілу таких процессів, у загальному випадку, окрім нелінійної безінерційної системи, не має розв'язку.

Розглянемо нелінійну безінерційну систему на яку діє випадковий процес $\xi_1(t)$ із наперед заданими імовірнісними характеристиками. Необхідно знайти імовірнісні характеристики відгуку $\xi_2(t)$.

Якщо оператор нелінійної системи, яка перетворює вхідний сигнал $\xi_1(t)$ у вихідний сигнал $\xi_2(t)$, позначити $G(x)$, тоді схематично сформульовану задачу можна зобразити наступним чином:



Оператор $G(x)$ носить назву амплітудної характеристики.

Якщо процес на вході нелінійної безінерційної системи є стаціонарним випадковим процесом, то вихідний процес теж буде стаціонарним випадковим процесом.

У зв'язку з труднощами розрахунків при вирішенні сформульованої задачі обмежуються обчисленням основних імовірнісних характеристик вихідного сигналу - його одновимірною функцією розподілу (або щільністю імовірностей), математичним сподіванням і кореляційною функцію.

Одновимірні моментні функції відгуку нелінійної системи визначаються через відомі характеристики впливу

$$\alpha_k\left[\xi_2(t)\right] = \mathbf{M}\left\{\xi_2^k(t)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{t_0}^k(x)\,dF_1(x).$$

Зокрема математичне сподівання відгуку нелінійної системи визначається за формулою

$$m_2 = \mathbf{M}\left\{G_{t_0}\left[\xi_1(t)\right]\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{t_0}(x)\,dF_1(x).$$

Двовимірні характеристики вихідного сигналу

$$\alpha_{k_1,k_2}\left[\xi_2(t)\right] = \mathbf{M}\left\{\xi_2^{k_1}(t_1)\xi_2^{k_2}(t_2)\right\} = \mathbf{M}\left\{G_{t_0}^{k_1}\left[\xi_1(t_1)\right]G_{t_0}^{k_2}\left[\xi_1(t_2)\right]\right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{t_0}^{k_1}(x_1)G_{t_0}^{k_2}(x_2)\,p_1(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1dx_2.$$

Усі центральні моментні функції обчислюються через початкові моментні функції.

У разі стаціонарного гауссівського впливу характеристики вихідного сигналу можна знайти за наступними формулами:

- Математичне сподівання:

$$m_2 = \frac{1}{\sigma_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x)\varphi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)dx,$$

де m_1, σ_1- математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення впливу $\xi_1(t)$, а функція $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – табульована.

- Кореляційна функція

$$R_2(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^2}{n!}r_1^n(\tau).$$

де $r_1(\tau)$- нормована кореляційна функція впливу, а коефіцієнти C_n визначаються за формулою

$$C_n = \frac{1}{\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \varphi^{(n)} \left(\frac{x - m_1}{\sigma_1} \right) dx .$$

Знаходження функції розподілу або щільності ймовірностей істотно залежить від виду амплітудної характеристики системи. Загальна методика знаходження даних характеристик наведена в роботах [5, 7].

Стаціонарні випадкові процеси з дискретним спектром

Випадкові процеси $\xi(t)$, представлені у вигляді

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos(2\pi f_k t - \varphi_k),$$

де η_k, φ_k – незалежні випадкові величини, причому випадкові величини φ_k є незалежними і рівномірно розподілені на інтервалі $[0; 2\pi], \eta_k$ - некорельованими випадкові величини для яких виконуються наступні умови

$$m_{\eta_k} = 0, \quad D\{\eta_k\} = 2\sigma_k^2,$$

є стаціонарними в широкому сенсі з нульовим математичним очікуванням і кореляційною функцією вигляду

$$R(t_1, t_2) = R(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \cos(2\pi f_k \tau).$$

Дисперсія випадкового процесу дорівнює

$$D\{\xi(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 .$$

Таким чином, будь-який стаціонарний випадковий процес можна представити у вигляді нескінченної суми гармонік з випадковими параметрами, тоді кореляційна функція дорівнює кореляційним функціям складових (окремих гармонік), а дисперсія – дисперсіям складових.

Дискретним спектром стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ називається набір дисперсій $\left\{\sigma_k^2\right\}_{k=1}^{\infty}$ амплітуд гармонічних складових, на які розкладається стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$. Приблизний графік такого спектра наведено на рис.6.

Зазначимо окремий випадок коли $f_k = kf_1$, тобто випадковий процес являє собою суму гармонік з кратними частотами. У цьому випадку процес є періодичним і його кореляційна функція теж є періодичною функцією $R(\tau) = R(\tau + T)$, в цьому випадку

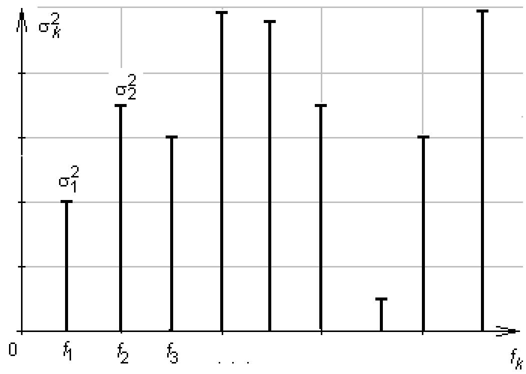


Рис.6

дисперсії окремих гармонійних складових випадкового процесу (1) можуть бути знайдені з виразу

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R(\tau) e^{i2\pi k f_1 \tau} d\tau .$$

Лабораторна робота № 1

АНАЛІЗ РЕАЛІЗАЦІЙ ОДИНОЧНОГО ПРЯМОКУТНОГО ІМПУЛЬСУ З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Мета роботи: експериментальне отримання реалізацій прямокутного імпульсу з випадковими параметрами і порівняння цих параметрів з теоретичними

Модель досліджуваного процесу описується формулою

$$\xi(t) = AE\left(t - t_0\right)E\left(t_0 + \tau - t\right), \tag{1.1}$$

де $E(t)$ - одинична функція, $A > 0,\ t_0 > 0,\ \tau > 0$ – параметри імпульсу.

РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА

1. Імпульс з випадковою амплітудою A
   1.1. Вибрати фіксоване значення t_0 з інтервалу $[0;1)$;
   1.2. Вибрати фіксоване значення τ з інтервалу $(0;1]$;
   1.3. Задати три довільних *(не обов'язково цілих)* значення $A_k,\ k = \overline{1,3}$ з проміжку $[1;3]$;
   1.4. Для вибраних значень A_k задати імовірності p_k;
   1.5. Побудувати ряд розподілу амплітуди A

A_k	A_1	A_2	A_3
p_k	p_1	p_2	p_3

   1.6. Намалювати графіки можливих реалізацій процесу (1.1) для вибраних параметрів.
2. Імпульс з випадковим часом появи t_0
   2.1. Вибрати фіксоване значення A з інтервалу $[1;3]$;

2.2. Вибрати фіксоване значення τ з інтервалу $(0;1]$;

2.3. Задати три довільних значення t_{0k}, $k=\overline{1,3}$ з проміжку $[0;1)$;

2.4. Для вибраних значень t_{0k} задати імовірності p_k;

2.5. Побудувати ряд розподілу моменту часу t_0

t_{0k}	t_{01}	t_{02}	t_{03}
p_k	p_1	p_2	p_3

2.6. Намалювати графіки можливих реалізацій процесу (1.1) для вибраних параметрів.

3. Імпульс з випадковою тривалістю τ.

3.1. Вибрати фіксоване значення A з інтервалу $[1;3]$;

3.2. Вибрати фіксоване значення t_0 з проміжку $[0;1)$;

3.3. Задати три довільних значення τ_k, $k=\overline{1,3}$ з інтервалу $(0;1]$;

3.4. Для вибраних значень τ_k задати імовірності p_k;

3.5. Побудувати ряд розподілу тривалості τ

τ_k	τ_1	τ_2	τ_3
p_k	p_1	p_2	p_3

3.6. Намалювати графіки можливих реалізацій процесу (1.1) для вибраних параметрів.

4. Імпульс з випадковими амплітудою A та тривалістю τ.

4.1. Вибрати фіксоване значення t_0 появи імпульсу з проміжку $[0;1)$;

4.2. Вибрати два довільних значення амплітуди A_k імпульсу з проміжку $[1;3]$;

4.3. Задати імовірності p_k амплітуд A_k

4.4. Побудувати ряд розподілу амплітуд

A_k	A_1	A_2
p_k	p_1	p_2

4.5. Вибрати два довільних значення тривалості імпульсу τ_j з інтервалу $[0;1]$;

4.6. Задати імовірності q_j тривалостей τ_j;

4.7. Побудувати ряд розподілу тривалостей τ

τ_j	τ_1	τ_2
q_j	q_1	q_2

4.8. Вважаючи амплітуду A та тривалість τ незалежними величинами, побудувати їх спільний розподіл

A_k \ τ_j	τ_1	τ_2
A_1	g_{11}	g_{12}
A_2	g_{21}	g_{22}

4.9. Побудувати графіки можливих реалізацій процесу (1.1) для вибраних параметрів.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА

1. Запустити роботу програми «Лаб.робота 1»;
2. Провести аналіз реалізацій прямокутного імпульсу з випадковою амплітудою:

2.1. Ввести значення всіх параметрів, задані при виконанні пункту 1 розрахункової частини.

2.2. Введіть кількість аналізованих реалізацій (значення з діапазону 20 ... 50).

2.3. Послідовно переглядаючи графіки реалізацій, визначити для кожної з них значення амплітуди і занести їх до таблиці виду

N	N_1	....	N_m
A	A_1	....	A_m

де N_k - номер реалізації, A_k - амплітуда в k-тій реалізації.

2.4. Побудувати таблицю

A_k	A_1	A_2	A3
$N(A_k)$	$N(A_1)$	$N(A_2)$	N(A3)
$\overline{p}_k$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$

де $N(A_k)$ – число реалізацій, що мають амплітуду A_k, $\overline{p}_k$ - частота появи значення A_k.

2.5. Порівняти отримані частоти $\overline{p}_k$ з відповідними імовірностями p_k. Пояснити отримані результати.

3. Провести аналіз реалізацій прямокутного імпульсу з випадковим часом появи:

3.1. Ввести значення всіх параметрів, задані при виконанні пункту 2 розрахункової частини.

3.2. Введіть кількість аналізованих реалізацій (значення з діапазону 20 ... 50).

3.3. Послідовно переглядаючи графіки реалізацій, визначити для кожної з них значення часу появи і занести їх до таблиці виду

N	N_1	....	N_m
t_0	t_{01}	....	t_{0m}

де N_k – номер реалізації, t_{0k} - час появи імпульсу в k-тій реалізації.

3.4. Побудувати таблицю

t_{0k}	t_{01}	t_{02}	t_{03}
$N(t_{0k})$	$N(t_{01})$	$N(t_{02})$	$N(t_{03})$
$\overline{p}_k$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$

де $N(t_{0k})$- число реалізації, що мають час появи t_{0k}, $\overline{p}_k$ - частота появи значення t_{0k}.

3.5. Порівняти отримані частоти $\overline{p}_k$ з відповідними імовірностями p_k. Пояснити отримані результати.

4. Порівняти отримані частоти прямокутного імпульсу з випадковою тривалістю:

4.1. Ввести значення всіх параметрів, задані при виконанні пункту 3 розрахункової частини.

4.2. Введіть кількість аналізованих реалізацій (значення з діапазону 20 ... 50).

4.3. Послідовно переглядаючи графіки реалізацій, визначити для кожної з них значення тривалості і занести їх до таблиці виду

N	N_1	. . .	N_m
τ	τ_1	. . .	τ_m

де N_k – номер реалізації, τ_k - тривалість в k-тій реалізації.

4.4. Побудувати таблицю

τ_k	τ_1	τ_2	τ_3
N(τ_k)	N(τ_1)	N(τ_2)	N(τ_3)
$\overline{p}_k$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$

де N(τ_k)- число реалізацій, що мають тривалість τ_k, $\overline{p}_k$ - частота появи значення τ_k.

4.5. Порівняти отримані частоти $\overline{p}_k$ з відповідними імовірностями p_k. Пояснити отримані результати.

5. Провести аналіз реалізацій прямокутного імпульсу з випадковою амплітудою і тривалістю:

5.1. Ввести значення всіх параметрів, задані при виконанні пункту 4 розрахункової частини.

5.2. Введіть кількість аналізованих реалізацій (значення з діапазону 20 ... 50).

5.3. Послідовно переглядаючи графіки реалізацій, визначити для кожної з них значення тривалості і амплітуди занести їх до таблиці виду

N	N_1 ... $N_к$ .... N_m
(A,τ)	... (A_k,τ_k) ...

де N_k - номер реалізації, A_k та τ_k - відповідно амплітуда та тривалість в k-тій реалізації.

5.4. Побудувати таблицю

(A_k,τ_j)	(A_1,τ_1)	(A_1,τ_2)	(A_2,τ_1)	(A_2,τ_2)
$N(A_k,\tau_j)$	$N(A_1,\tau_1)$	$N(A_1,\tau_2)$	$N(A_2,\tau_1)$	$N(A_2,\tau_2)$
$\overline{g_{kj}}$	$\overline{g_{11}}$	$\overline{g_{12}}$	$\overline{g_{21}}$	$\overline{g_{22}}$

де $N(A_k,\tau_j)$- число реалізацій, що мають амплітуду A_k тривалість τ_k, $\overline{g_{kj}}$ - частота появи значень A_k та τ_j.

5.5. Порівняти отримані частоти $\overline{g_{kj}}$ з відповідними ймовірностями g_{kj}. Пояснити отримані результати.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати визначення випадкового процесу.
2. Що являють собою миттєві значення випадкового процесу у фіксовані моменти часу?
3. Що таке реалізація випадкового процесу?
4. Що з фізичної точки зору означає фіксація елементарного події у випадкового процесу?

Лабораторна робота №2

АНАЛІЗ ОДНОВИМІРНИХ МОМЕНТНИХ ФУНКЦІЙ ОДИНОЧНОГО ПРЯМОКУТНОГО ІМПУЛЬСУ З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Мета роботи: експериментальне отримання математичного сподівання і дисперсії прямокутного імпульсу з випадковими параметрами і порівняння цих характеристик з теоретичними.

Модель досліджуваного процесу задається формулою

$$\xi(t) = AE\left(t - t_0\right)E\left(t_0 + \tau - t\right), \tag{2.1}$$

де $E(t)$ - одинична функція, t_0 – деяка постійна, $A > 0$, $\tau > 0$ – незалежні випадкові величини.

Математичне сподівання і дисперсія моделі (2.1) відповідно рівні

$$m_\xi(t) = m_A \cdot m(t - t_0),$$

$$\sigma_\xi^2(t) = m\left(t - t_0\right) \cdot \left[\, \alpha_2\left[A\right] - m_A^2 \cdot m\left(t - t_0\right)\right],$$

де m_A – математичне сподівання випадкової амплітуди A, $\alpha_2\left[A\right]$ – початковий момент другого порядку випадкової амплітуди A, $m(t)$ – математичне сподівання процесу (2.1) при амплітуді $A=1$ та $t_0 = 0$, яке дорівнює

$$m(t) = \left[1 - F_\tau(t)\right] \cdot E\left(t\right),$$

де $F_\tau(t)$ – функція розподілу випадкової тривалості τ.

РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА

Прийнявши значення постійної $t_0 = 1$, записати аналітичні вирази і побудувати графіки $m_\xi(t)$ та $\sigma_\xi^2(t)$ ля трьох перерахованих нижче моделей, в яких конкретизуються закони розподілення вхідних в неї випадкових параметрів.

Модель 1 – імпульс з випадковою амплітудою A

1.1) Вибрати фіксоване значення τ з інтервалу $(0;1]$;

1.2) Задати дискретний закон розподілу випадкової амплітуди A, вибравши три довільних значення A_k, $k=\overline{1,3}$ з інтервалу $(0;4]$ і відповідні їм імовірності p_k;

A_k	A_1	A_2	A_3
p_k	p_1	p_2	p_3

Модель 2 – імпульс з випадковою тривалістю τ

2.1) Вибрати фіксоване значення амплітуди A з інтервалу $(0;4]$;

2.2) Задати рівномірний закон розподілу випадкової тривалості τ на інтервалі $[a,b]$, де $0<a,\ b<1$.

Модель 3 – імпульс з випадковою амплітудою A та випадковою тривалістю τ

3.1) Задати рівномірний закон розподілу випадкової амплітуди A на інтервалі $[a,b]$, де $0<a,\ b<4$.

3.2) Задати рівномірний закон розподілу випадкової тривалості τ на інтервалі $[a,b]$, де $0<a,\ b<1$.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА

1. Запустити роботу програми «Лаб. робота 2»;
2. При заданій кількості реалізацій $N=10;100;1000$ отримати експериментальні значення математичного очікування і дисперсії для розглянутих моделей.
3. Замалювати графіки експериментальних даних і порівняти їх з теоретичними даними для трьох моделей.
4. Проаналізувати отримані результати і зробити висновки по роботі.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Як визначається математичне очікування випадкового процесу?

2. Який фізичний зміст має математичне сподівання випадкового процесу? Проілюструвати графіком.
3. Як визначається дисперсія випадкового процесу?
4. Який фізичний зміст має дисперсія випадкового процесу?
5. Як визначаються одномірні початкові моментні функції випадкового процесу?
6. Як визначаються одномірні центральні моментні функції випадкового процесу?

Лабораторна робота № 3
КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Мета роботи: Дослідження кореляційних функцій типових моделей випадкових процесів.

Моделі досліджуваних процесів.

Модель 1. Шумовий процес $\xi_1(t)$ має гауссовское розподіл миттєвих значень з нульовим математичним очікуванням і кореляційною функцією

$$R_1(\tau) = a^{\frac{|\tau|}{T}}, \qquad |a| < 1, \tag{3.1}$$

де a - дійсна постійна, $T = 2 \cdot 10^{-3} c$.

Модель 2. Гармоніка з випадковою початковою фазою $\xi_2(t)$

$$\xi_2(t) = A\cos(2\pi f_0 t - \varphi), \tag{3.2}$$

де $A, f_0 > 0$ - постійні, φ - випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi]$.

Модель 3. Адитивна суміш шуму і гармоніки

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t), \tag{3.3}$$

де $R_{12}(\tau) = 0$ – взаємна кореляційна функція випадкових процесів $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$.

РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА

1. Знайти для процесу $\xi_1(t)$ інтервал кореляції τ_0, прийнявши значення постійної $a = 0.9$.
2. Побудувати графік кореляційної функції $R_1(\tau)$ процесу $\xi_1(t)$ для значень $\tau \in [0; 3 \cdot \tau_0]$.
3. Записати формулу для кореляційної функції $R_2(\tau)$ процесу $\xi_2(t)$.

4. Побудувати графік кореляційної функції $R_2(\tau)$ для значень $A = 1B;\ f_0 = 4\ Гц;\ \tau \in [0; 50\tau_0]$.
5. Записати вираз для кореляційної функції процесу $\xi(t)$.
6. Побудувати графіки кореляційних функцій процесу $\xi(t)$ для значень $A = 5; 1; 0.2$, при наступних значеннях постійних: $a = 0,9$; $f_0 = 4\ \tilde{A}\ddot{o};\ \tau \in [0; 50\tau_0]$.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА

1. Запустити роботу програми «Лаб. робота 3»;
2. Провести аналіз шумового процесу («Модель 1»)
   - 2.1. Змоделювати реалізацію шумового процесу.
   - 2.2. Якісно перевірити виконання правил «2σ» та «3σ» для досліджуваного процесу.
   - 2.3. Отримати графік кореляційної функції шумового процесу.
   - 2.4. Знайти інтервал кореляції і порівняти отримане значення з теоретичним.
   - 2.5. Повторити п.п.2.1-2.4 для 2-3 реалізацій.
   - 2.6. Замалювати графік однією з реалізацій і графік кореляційної функції.
   - 2.7. Порівняти отримані результати з теоретичними.
3. Провести аналіз гармоніки з випадковою початковою фазою («Модель 2»).
   - 3.1. Змоделювати реалізацію гармонійного процесу.
   - 3.2. Визначити параметри досліджуваного процесу - амплітуду, частоту, початкову фазу.
   - 3.3. Отримати графік кореляційної функції.
   - 3.4. Визначити за отриманим графіком параметри досліджуваного процесу.
   - 3.5. Повторити п.п.3.1-3.4 для 2-3 реалізацій.

3.6. Замалювати графік однією з реалізацій і графік кореляційної функції.

3.7. Порівняти отримані результати з теоретичними.

4. Провести аналіз адитивної суміші гармоніки і шуму («Модель 3»).

4.1. Змоделювати реалізацію суміші шумового процесу і гармоніки при значенні амплітуди $A = 5$. Замалювати графік отриманої реалізації.

4.2. Отримати графік кореляційної функції суміші і замалювати його.

4.3. Повторити п.п. 4.1 - 4.2 для значень амплітуд гармоніки $A = 1$, $A = 0.2$.

4.4. Порівняти отримані результати з теоретичними.

5. Проаналізувати отримані у роботі результати і зробити висновки по роботі.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Який випадковий процес називається стаціонарним?
2. Що таке стаціонарний у вузькому сенсі випадковий процес?
3. Яким властивістю володіє кореляційна функція стаціонарного у вузькому сенсі випадкового процесу?
4. Як визначається стаціонарний в широкому сенсі випадковий процес?
5. Перерахувати основні властивості кореляційної функції стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу.
6. Як пов'язані кореляційна функція і дисперсія випадкового процесу?
7. Що таке інтервал кореляції?
8. Як обчислити інтервал кореляції?

Лабораторна робота № 4

КОРЕЛЯЦІЙНІ МЕТОДИ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

Мета роботи: Дослідження можливості використання кореляційних функцій для виявлення сигналу, спотвореного дією адитивних перешкод.

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай $\xi_0(t)$ – корисний сигнал, який представляє собою стаціонарний випадковий процес з кореляційною функцією $R_0(\tau)$.

Сигнал $\xi_0(t)$ випромінюється в середу, в якій відбувається його ослаблення і затримка, тобто в точці прийому модель корисного сигналу $\xi_1(t)$ має вигляд

$$\xi_1(t) = H\xi_0(t - t_0), \tag{4.1}$$

де $0 < H \le 1$ – параметр, що характеризує втрати в середовищі, $t_0 > 0$ – затримка розповсюдження.

Крім того, прийнятий сигнал (4.1) спотворюється адитивною перешкодою $\xi_2(t)$, яка є стаціонарним випадковим процесом з кореляційною функцією $R_2(\tau)$. Передбачається, що процеси $\xi_0(t)$ та $\xi_2(t)$ є некорельованими.

Таким чином, на вхід приймача надходить процес

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t). \tag{4.2}$$

Приймач в результаті обробки суміші (4.2) повинен виявляти сигнал $\xi_1(t)$ і виміряти його параметри. Одним з критеріїв якості прийому є ставлення сигнал-перешкода

$$k = \frac{\text{С}}{\text{З}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \tag{4.3}$$

де $\sigma_1^2 = D\{\xi_1(t)\}$; $\sigma_2^2 = D\{\xi_2(t)\}$.

З двох приймачів кращим вважається той, який дозволяє виявити корисний сигнал при меншому відношенні С/З.

Існують різні методи побудови приймачів, серед яких важливе місце займають методи, засновані на використанні властивостей кореляційних функцій.

<u>Метод 1</u>. Метод автокореляційної функції (АКФ).

Використовуючи формули (4.1) і (4.2), неважко отримати кореляційну функцію процесу (4.2):

$$R_{\xi}(\tau) = H^2 R_0(\tau) + R_2(\tau). \tag{4.4}$$

Алгоритм прийому заснований на вимірюванні кореляційної функції (4.4) і найбільш часто застосовується для виявлення гармоніки з випадковою початковою фазою.

<u>Метод 2</u>. Метод взаємної кореляційної функції (ВКФ) з опорним сигналом.

Нехай приймач зберігає копію випроміненого корисного сигналу $\xi_0(t)$, який називають опорним. Тоді взаємна кореляційна функція $R_{\xi_0 \xi}(\tau)$ між опорним і прийнятим процесом (4.2) дорівнює

$$R_{\xi_0 \xi}(\tau) = H R_0(\tau - t_0) \tag{4.5}$$

Алгоритм прийому заснований на вимірюванні взаємної кореляційної функції $R_{\xi_0 \xi}(\tau)$.

<u>Метод 3</u>. Двоканальний метод ВКФ з некорельованими перешкодами в каналах.

Нехай сигнал $\xi_0(t)$ одночасно випромінюється по двох каналах, які однаково послаблюють сигнал і затримують сигнал, а перешкоди в каналах

$\xi_2(t)$ та $\xi_3(t)$, є різними стаціонарними випадковими процесами, некорельовані між собою і з сигналом.

З виходу каналів на приймач надходять процеси

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) \tag{4.6}$$

$$\eta(t) = \xi_1(t) + \xi_3(t) \tag{4.7}$$

Очевидно, що взаємна кореляційна функція $R_{\xi\eta}(\tau)$ між процесами (4.6) та (4.7) рівна

$$R_{\xi\eta}(\tau) = H^2 R_0(\tau). \tag{4.8}$$

Алгоритм прийому заснований на вимірюванні взаємної кореляційної функції між вихідними процесами $\xi(t)$ та $\eta(t)$.

Метод 4. Двоканальний метод ВКФ з інвертуванням корисного сигналу. Нехай є два ідентичних каналу, в кожному з яких сигнал спотворюється перешкодою $\xi_2(t)$, яка некорельована з сигналом і є стаціонарним випадковим процесом з кореляційною функцією $R_2(\tau)$. У перший канал випромінюється сигнал $\xi_0(t)$, а в другій - інвертований сигнал $-\xi_0(t)$. З виходу каналів на приймач надходять процеси

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t), \tag{4.9}$$

$$\eta(t) = -\xi_1(t) + \xi_2(t). \tag{4.10}$$

Для процесів (4.9) і (4.10) не важко отримати кореляційні функції:

$$R_\xi(\tau) = H^2 R_0(\tau) + R_2(\tau), \tag{4.11}$$

$$R_\eta(\tau) = H^2 R_0(\tau) + R_2(\tau) \tag{4.12}$$

$$R_{\xi\eta}(\tau) = -H^2 R_0(\tau) + R_2(\tau). \tag{4.13}$$

З формул (4.11)–(4.13) випливає, що

$$R_0(\tau) = \frac{R_\xi(\tau) - R_{\xi\eta}(\tau)}{2H^2}. \tag{4.14}$$

Алгоритм роботи приймача заснований на вимірюванні кореляційних функцій (4.11), (4.13) і обчисленні кореляційної функції сигналу за формулою (4.14).

РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА

1. Моделі досліджуваних процесів

Корисний сигнал $\xi_0(t)$ – гармоніка з випадковою початковою фазою, тобто

$$\xi_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi), \tag{4.15}$$

де $A_0 = 4$; $f_0 = 4\text{Гц}$; φ – випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi]$.

Завада $\xi_2(t)$ є гауссовским стаціонарним випадковим процесом з нульовим математичним очікуванням і кореляційною функцією

$$R_2(\tau) = a^{\frac{|\tau|}{T}}, \tag{4.16}$$

де $a = 0{,}9$; $T = 2 \cdot 10^{-3} c$.

1. Параметри середовища $H = 1;\ 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\qquad t_0 = 0{,}2c$.
2. Довести справедливість формул (4.4), (4.5), (4.8), (4.11)–(4.14).
3. Записати формули для знаходження амплітуди A_1 і дисперсії σ_1^2 прийнятого корисного сигналу (4.1).
4. Знайти значення A_1, σ_1^2 та k для різних значень параметра H. Отримані результати звести в табл. 4.1.

Табл. 4.1

H	1	0,5	0,1	0,05
A_1				
σ_1^2				
k				

5. Знайти розмах $\pm\Delta A$ миттєвих значень прийнятого процесу (4.2) за формулою

$$\pm\Delta A = \pm\left(A_1 + 2\sigma_2\right) \qquad (4.17)$$

при різних значеннях H. Отримані результати звести в табл. 4.2.

Табл. 4.2

H	1	0,5	0,1	0,05
$\pm\Delta A$				

6. Для методу 1 знайти $R_{\xi}(0)$ для різних значень H. Отримані результати звести в табл. 4.3.

Табл. 4.3

H	1	0,5	0,1	0,05
$R_{\xi}(0)$				

7. Для метода 2 знайти значення $R_{\xi_0\xi}(0)$ та $R_{\xi_0\xi}(t_0)$ при різних H. Отримані результати звести в табл. 4.4.

Табл. 4.4

H	1	0,5	0,1	0,05
$R_{\xi_0\xi}(0)$				
$R_{\xi_0\xi}(t_0)$				

9**.** Для метода 3 знайти значення $R_{\xi\eta}(0)$ при різних H. Результати звести в табл. 4.5.

Табл. 4.5

H	1	0,5	0,1	0,05
$R_{\xi\eta}(0)$				

10**.** Для метода 4 знайти значення $R_{\xi}(0)$ та $R_{\xi\eta}(0)$ при різних H. Результати звести в табл. 4.6.

Табл. 4.6

H	1	0,5	0,1	0,05
$R_{\xi}(0)$				
$R_{\xi\eta}(0)$				

З використанням табл. 4.6 переконатися в справедливості формули (4.14).

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА

1. Запустити роботу програми «Лаб. робота 4 »;
2. Провести аналіз методу автокореляційної функції («***метод 1***»).
   - 2.1. Змоделювати реалізацію процесу.
   - 2.2. Змоделювати реалізацію прийнятого процесу для значення параметра $H = 1$.
   - 2.3. Замалювати графік реалізації і зіставити його з результатами табл. 4.2.
   - 2.4. Отримати графік кореляційної функції прийнятого процесу і зіставити його з результатами табл. 4.3.
   - 2.5. Повторити п.п. 2.1-2.4 для значень параметра $H = 0.5;\ 0.1$.
3. Провести аналіз методу взаємної кореляційної функції з опорним сигналом («***метод 2***»).
   - 3.1. Змоделювати реалізацію процесу.
   - 3.2. Змоделювати реалізацію прийнятого процесу для значення параметра $H = 0.5$.
   - 3.3. Отримати графік взаємної кореляційної функції між опорним і прийнятим процесом і зіставити з результатами табл. 4.4.
   - 3.4. Повторити п.п. 3.1-3.3 для значень параметра $H = 0.1;\ 0.05$.
4. Провести аналіз двоканального методу взаємної кореляційної функції з некорельованими перешкодами в каналах («***метод 3***»).
   - 4.1. Змоделювати реалізацію процесу.

4.2. Змоделювати реалізації прийнятих процесів для значення параметра $H = 0.5$.

4.3. Замалювати графіки реалізацій, порівняти їх між собою і зіставити з результатами табл. 4.2.

4.4. Отримати графіки взаємної кореляційної функції між прийнятими процесами і зіставити з результатами табл. 4.5.

4.5. Повторити п.п. 4.1-4.4 для значень параметра $H = 0.1;\ 0.05$.

5. Провести аналіз двоканального методу взаємної кореляційної функції з інвертуванням корисного сигналу («***метод 4***»).

5.1. Змоделювати реалізацію процесу.

5.2. Змоделювати реалізації прийнятих процесів для значення параметра $H = 0.5$.

5.3. Замалювати графіки реалізацій, порівняти їх між собою і зіставити з результатами табл. 4.2.

5.4. Отримати графіки кореляційної функції прийнятого процесу, взаємної кореляційної функції прийнятих процесів і різниці цих кореляційних функцій. Зіставити ці графіки з результатами табл. 4.6 і формулою (4.14).

5.5. Повторити п.п. 5.1-5.4 для значень параметра $H = 0.1;\ 0.05$.

5.6. Замалювати графіки кореляційної функції прийнятого процесу, взаємної кореляційної функції прийнятих процесів і різниці цих процесів при параметрі $H = 0.05$.

6. Проаналізувати отримані результати і сформулювати висновки по роботі.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Як пов'язана кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу з його дисперсією?

2. Як зміниться кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу при множенні його на константу?
3. Як зміниться кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу при його зсуві по осі часу на величину?
4. Чому дорівнює середньоквадратичне відхилення суми двох некорельованих стаціонарних випадкових процесів?
5. Чому дорівнює кореляційна функція суми двох некорельованим стаціонарних випадкових процесів?
6. Чому дорівнює взаємна кореляційна функція суми і різниці двох некорельованих стаціонарних випадкових процесів?
7. Чому дорівнює математичне сподівання гармоніки з випадковою початковою фазою? Довести.
8. Чому дорівнює кореляційна функція гармоніки з випадковою початковою фазою?

Лабораторна робота № 5

АНАЛІЗ КВАДРАТИЧНОГО ДЕТЕКТОРУ ВНАСЛІДОК ВПЛИВУ ГАУССІВСЬКОГО СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Мета роботи: експериментальне отримання імовірнісних характеристик відгуку квадратичного детектора при впливі стаціонарного гауссовского випадкового процесу і порівняння цих характеристик з теоретичними.

На вхід квадратичного детектора з амплітудною характеристикою

$$y = G(x) = x^2 \tag{5.1}$$

впливає гауссовский стаціонарний випадковий процес з наступними імовірнісними характеристиками:

Характеристики впливу квадратичного детектора

1. Математичне сподівання впливу дорівнює m_1.
2. Кореляційна функція дорівнює

$$R_1(\tau) = 0.9^{\frac{|\tau|}{T}}, \tag{5.2}$$

де $T = 2 \cdot 10^{-3}\, c$.

Характеристики відгуку квадратичного детектору

1. Функція розподілу

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ F_1\left(\sqrt{y}\right) - F_1\left(-\sqrt{y}\right), & y > 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

де $F_1(x)$ - функція розподілу впливу.

2. Математичне сподівання впливу дорівнює

$$m_2 = \sigma_1^2 + m_1^2. \tag{5.4}$$

3. Кореляційна функція дорівнює

$$R_2(\tau) = 4\sigma_1^2 m_1^2 r_1(\tau) + 2\sigma_1^4 r_1^2(\tau), \tag{5.5}$$

де $r_1(\tau)$ - нормована кореляційна функція дії.

РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА

1. Визначити приблизний діапазон можливих значень впливу і відгуку.
2. Побудувати приблизні графіки реалізацій впливу і відгуків для заданих $G(x)$ и $m_1 = 0;\ 0.75;\ \ 1.25$.
3. Записати аналітичний вираз для знаходження щільності ймовірностей впливу і відгуків для довільних значень m_1 і σ_1 та заданих значень $m_1 = 0;\ 0.75;\ \ 1.25$.
4. Побудувати графіки щільностей ймовірностей впливу і відгуків для заданих значень $m_1 = 0;\ 0.75;\ \ 1.25$.
5. Знайти математичні очікування відгуків для конкретних значень $m_1 = 0;\ 0.75;\ \ 1.25$. Результати розрахунків звести в таблицю 1.

Табл.1

σ_1^2	m_1		m_2	
	теор.	*експер.*	*теор.*	*експер.*

6. Знайти аналітичний вираз для дисперсії відгуків для довільних значень m_1 і σ_1 та заданих значень $m_1 = 0;\ 0.75;\ \ 1.25$. Результати розрахунків звести в таблицю 3.

Табл.2

σ_1^2	m_1	σ_2^2	
		теор.	*експер.*

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА

1. Запустити роботу програми «Лаб. робота 5»;
2. Провести аналіз випадку №1 ($m_1 = 0$).
   2.1. Отримати графіки реалізацій процесу впливу і відгуку квадратичного детектора.
   2.2. Визначити діапазон можливих значень впливу і відгуку.
   2.3. Замалювати графіки експериментальних щільності ймовірностей впливу і відгуку.
   2.4. Експериментально визначити значення математичного очікування і дисперсії впливу і відгуку. Результати звести в таблицю. Отримані результати порівняти з теоретичними і зробити висновки.

ПРИМІТКА: Експериментальні значення математичних очікувань відгуку нелінійної системи визначаються згідно з формулою

$$\overline{m_2} = \sum x_i \overline{p_i},$$

де x_i - центральні точки інтервалів гістограм щільності імовірностей, $\overline{p_i}$ - частота потрапляння значень випадкового процесу в i - *тий* інтервал гістограми і дорівнює площі прямокутника відповідного інтервалу гістограми.

Дисперсію $\overline{\sigma_2^2}$ відгуку нелінійної системи слід обчислити аналогічним чином.

3. Провести аналіз випадку №2 ($m_1 = 0.75$).Для цього повторити пп. 2.1-2.4.
4. Провести аналіз випадку №3 ($m_1 = 1.25$).Для цього повторити пп. 2.1-2.4.
5. За результатами роботи сформулювати висновки.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що таке амплітудна характеристика нелінійної системи?
2. Висловити одномірну функцію розподілу стаціонарного гауссовского випадкового процесу через функцію Лапласа.
3. Дати визначення функції Лапласа.
4. Перерахувати властивості функції Лапласа.
5. Записати подання кореляційної функції стаціонарного гауссовского процесу у вигляді ряду.
6. Записати формулу для обчислення коефіцієнтів розкладання кореляційної функції стаціонарного гауссовского випадкового процесу в ряд.
7. Записати формулу для знаходження математичного очікування відгуку нелінійної системи при впливі гауссовского випадкового процесу.

Лабораторна робота № 6

АНАЛІЗ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ДИСКРЕТНИМ СПЕКТРОМ

<u>**Мета роботи:**</u> експериментальне дослідження реалізацій, кореляційної функції і спектра випадкового процесу з дискретним спектром.

МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖУВАНОГО ПРОЦЕСУ

1. Загальна формула моделі

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{10} A_k \cos\left(2\pi k f_1 t-\varphi_k\right), \tag{6.1}$$

де A_k - невипадкові амплітуди, f_1- невипадкова частота, $f_1=4\,\text{Гц}$, $\left\{\varphi_k\right\}_{k=1}^{10}$- незалежні, однаково розподілені випадкові величини, мають рівномірний закон розподілу на інтервалі $\left[0\,;2\pi\right]$.

1. ***Модель №1***

$$A_1=A_2=\ldots=A_{10}=A.$$

2. ***Модель №2***

$$A_k=\frac{A}{5}\left[\frac{\sin\left(k\pi/10\right)}{k\pi/10}\right]^2,\ \ k=\overline{1,10}. \tag{6.2}$$

РОЗРАХУНКОВА ЧАСТИНА

1. Записати формулу для спектрального представлення кореляційної функції $R(\tau)$ процесу (6.1).
2. ***Модель №1***

2.1. Задатися конкретним значенням A з діапазону $\left[1;\ 3\right]$(можна дробові значення).

2.2. Знайти коефіцієнти C_k спектрального представлення кореляційної функції $R(\tau)$.

2.3. Заповнити таблицю 6.1.

Табл.6.1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
C_k										
$\overline{C_k}$										

де $\overline{C_k}$ - експериментальні значення коефіцієнтів C_k.

2.4. Побудувати спектр процесу (6.1).

2.5. Знайти дисперсію процесу (6.1).

3. ***Модель №2***

3.1. Задатися конкретним значенням A з діапазону $[5;10]$(можна дробові значення).

3.2. Знайти амплітуди A_k за формулою (6.2).

3.3. Знайти коефіцієнти C_k спектрального представлення кореляційної функції $R(\tau)$.

3.4. Заповнити таблицю 6.2.

Табл. 6.2

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_k										
C_k										
$\overline{C_k}$										

3.5. Побудувати спектр процесу (6.1).

3.6. Знайти дисперсію процесу (6.1).

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ЧАСТИНА

1. Запустити роботу програми «Лаб. робота 6»;

2. Провести аналіз ***МОДЕЛІ №1***
    2.1. Ввести значення амплітуди A, заданий при виконанні пункту 2 розрахункової частини.
    2.2. Послідовно переглянути графіки реалізацій. Замалювати приблизні графіки реалізацій суми 5 і 10 гармонік.
    2.3. Послідовно переглянути графіки кореляційних функцій процесу (6.1). Замалювати графіки кореляційних функцій суми 5 і 10 гармонік.
    2.4. Експериментально отримати значення дисперсій окремих гармонійних складових.
    2.5. Експериментально отримати значення коефіцієнтів C_k.
    2.6. Послідовно переглянути графіки спектрів процесу (6.1) для різних n. Замалювати спектр суми 10 гармонік.
    2.7. Порівняти експериментально отримані результати з теоретичними, і зробити висновки.
3. Провести аналіз ***МОДЕЛІ №2***
    3.1. Ввести значення амплітуди A, заданий при виконанні пункту 3 розрахункової частини.
    3.2. Послідовно переглянути графіки реалізацій. Замалювати приблизні графіки реалізацій суми 5 і 10 гармонік.
    3.3. Послідовно переглянути графіки кореляційних функцій процесу (6.1). Замалювати графіки кореляційних функцій суми 5 і 10 гармонік.
    3.4. Експериментально отримати значення дисперсій окремих гармонійних складових.
    3.5. Експериментально отримати значення коефіцієнтів C_k.
    3.6. Послідовно переглянути графіки спектрів процесу (6.1) для різних n. Замалювати спектр суми 10 гармонік.
    3.7. Порівняти експериментально отримані результати з теоретичними, і зробити висновки.
4. За результатами роботи зробити висновки.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називається дискретним спектром стаціонарного випадкового процесу?
2. Записати формулу гармонійного розкладання кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу з дискретним спектром.
3. Сформулювати умови, при яких гармоніка з випадковими параметрами є стаціонарним випадковим процесом?
4. Як знайти дисперсії гармонійних складових за графіком спектру?

ЛІТЕРАТУРА

1. *Денисенко А.Н.* Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005. – 704 с.
2. *Волощук* Ю.І.Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для студентів вищих навчальних закладів, том 2. – Харків: «Компанія СМІТ», 2003. – 444 с.
3. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Сов. радио, 1982. – 624 с.
4. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.
5. *Ливщиц Н.А.,* Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Т.2. Нелинейные системы, системы дискретного действия. – М.: Сов. радио, 1963. – 484 с.
6. *Горяинов В.Т.,* Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи / Под ред. В.И. Тихонова. – М.: Сов. радио, 1980. – 544 с.
7. *Аналіз* нелінійного перетворення стаціонарного гауссівського випадкового процесу: Метод. рекомендації до виконання курсової роботи з дисципліни «Теорія процесів та систем. Випадкові процеси» для студентів напряму підготовки 050803 Акустотехніка / Уклад.: О.В. Гармаш, Т.А. Горовецька, О.І. Красильніков - К.: ВЦ «Принт-центр», 2008. – 44 с.
8. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., переработанное и дополненное – Самара: СНЦ РАН, 2002. 277 с.

ДОДАТОК

ТИТУЛЬНИЙ АРКУШ ПРОТОКОЛУ НА ЛАБОРАТОРНУ РОБОТИ

Міністерство освіти та науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Факультет електроніки
Кафедра акустичних та мультимедійних електронних систем

ПРОТОКОЛ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № _____

з дисципліни «Теорія процесів та систем-2. Випадкові процеси»
на тему:____

Виконав:
студент 3-го курсу гр.___
____
(ініціали, прізвище студента)

Перевірив: ___________________
(ініціали, прізвище викладача)

допуск	**виконання**	**протокол**	**захист**	**всього**

Київ – 202_